Рассмотрим вращение материальной точки вокруг некоторой оси на расстоянии от оси и угловой скоростью .

Момент импульса такой точки имеет численное значение

где – расстояние до оси вращения, а не длина радиус-вектора.

Можно также рассуждать с позиции векторной алгебры.

В плоскости вращения для материальной точки , тогда и

Видим, что в общем случае момент импульса выглядит довольно сложно и направления и не будут совпадать. В этом случае используется тензорная алгебра для вычисления его компонент. Однако, в случае вращения вокруг оси формулы становятся проще.

Если теперь рассматривать несколько точек, вращающихся вокруг той же оси то момент импульса системы равен и его численное значение:

Величину называют моментом инерции системы относительно оси. Тогда формулу можно переписать

Подчеркнем, что момент инерции зависит от положения оси вращения.

Если на вращение точек вокруг оси накладывается радиальное движение и (или) осевое, рассуждения не изменятся, и мы также получим формулу , но только теперь момент инерции перестает быть постоянной величиной.

Как известно

Тогда

где - момент внешних сил относительно оси вращения.

Если момент сил (например, для сил с осевой симметрией), то величина сохраняется. Это похоже на закон сохранения импульса.

Если точки совершают только вращательное движение, то момент инерции не изменяется и

Если рассматривать твердое дело как совокупность материальных точек, мы придем к такому же уравнению, где – момент всех внешних сил, действующих на тело.

**Работа внешних сил**:

Внутренние силы исключаются, т.к. работы они не совершают вследствие третьего закона Ньютона.

**Кинетическая энергия**:

Итак, в случае вращения жесткой системы точек или твердого тела вокруг оси, формально уравнения напоминают кинематические уравнения материальной точки, если заменить .

Для вычисления момента инерции однородного твердого тела его мысленно разбивают на элементарные объемы массой и производят суммирование (интегрирование) по всему объему:

Однако, в некоторых случаях можно получить необходимый результат элементарными методами. Для этого оказывается полезной **теорема Гюйгенса – Штейнера**.

Пусть – момент инерции некоторого тела относительно оси . Разбив тело на элементарные объемы с массами , можем написать

Рассмотрим ось смещенную параллельно оси на вектор . Относительно этой оси момент инерции найдется по формуле

Поскольку

Тогда

Как известно, центр масс тела определяется формулой

Или, в нашем случае

Тогда формулу можно переписать в виде

Если ось проходит через центр масс, то и формула приобретает простой вид

Таким образом, если нам известен момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, мы сможем легко найти момент инерции относительно любой другой оси, параллельной данной.

**Пример**. Момент инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через центр масс.

Для нахождения момента инерции относительно оси, проходящей через основание стержня, можно воспользоваться теоремой Гюйгенса-Штейнера

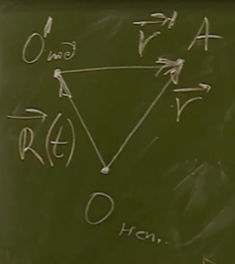
**Теорема Кенига (повтор – см. ц. масс)**. Теорема Кенига позволяет выразить полную кинетическую энергию механической системы через энергию движения центра масс и энергию движения относительно центра масс.

Рассмотрим замкнутую механическую систему в различных инерциальных системах отсчета и и пусть система движется относительно со скоростью . В этом случае связь между радиус-векторами будет такой

Связь между скоростями, соответственно

Предположим, что система K’ расположена в центре масс системы. Тогда и . Получим, что

**Независимость угловой скорости от выбора оси вращения**.



Поэтому, из второго и третьего равенства следует

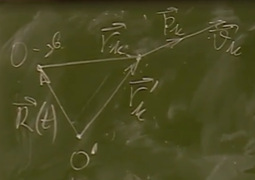
Итак, угловая скорость не зависит от выбора оси вращения.

**Случай, когда ось вращения движется**.

Пусть ось – неподвижна, а - двигается. Рассмотрим некоторую точку, к которой приложен вектор . Момент вектора относительно оси , по определению

Получаем общее векторное равенство для момента вектора относительно подвижной оси

Пусть – вектор силы, т.е. Тогда момент вектора имеет смысл вектора силы. Получили закон преобразования момента силы

Пусть – вектор импульса , тогда момент вектора имеет смысл момента импульса, т.е.

Для k-той точки

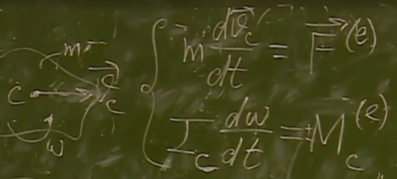
Берем производную

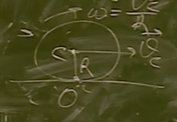
Суммируем для всех точек, принимая во внимание третий закон Ньютона

Если – ось, проходящая через центр масс, и

Иными словами, если ось двигающегося тела проходит через центр масс, то уравнение моментов выглядит также, как и в неподвижной системе отсчета.

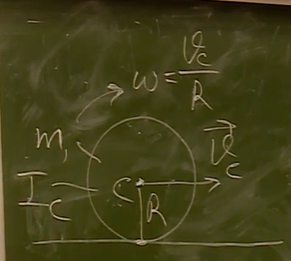
**Плоскопараллельное движение**. Это движение, при котором все точки тела двигаются в плоскостях, параллельных друг другу.



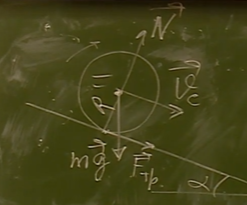
**Теорема Эйлера**. Если тело совершает плоскопараллельное движение, в каждый момент времени можно найти точку, скорость которой равна нулю, а тело вращается вокруг этой точки (т.е. найти мгновенную ось).

В этом случае уравнения динамики можно записать относительно неподвижной оси (без проскальзывания)

**Кинетическая энергия катящегося тела**.

Согласно теореме Кенига

Введем понятие радиуса инерции:

**Пусть теперь тело скатывается по наклонной плоскости без скольжения.

Уравнение Ньютона:

Уравнение моментов